

**Задания для муниципального этапа Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Ответы и решения

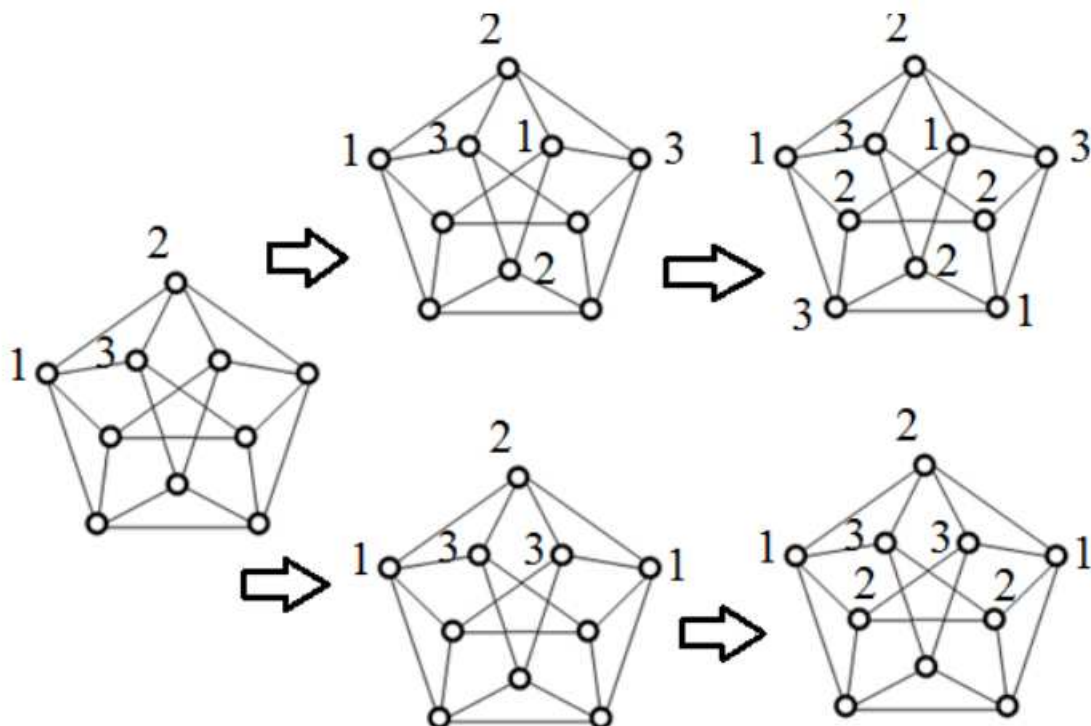
7 класс

1. **Ответ.** 95421.

2. **Ответ.** Нет.

Доказывается последовательным перебором вариантов. Например, на схеме каждой вершине указывается номер цвета 1, 2 или 3.

Начинаем с какого-то треугольника и, перебирая варианты, приходим к противоречию.



3. **Ответ.** Нет.

Если бы это было возможно, то первый, второй, третий и четвертый вместе внесли бы менее двух третей стоимости покупки. Но тогда на долю пятого приходится больше одной трети. Поэтому в сумме с любым из первых четверых он также внесет более одной трети.

4. **Ответ.** $x = 1938$, $y = 77$.

Пусть эти числа x и y . Тогда $x + y = 2015$ и $x = 25y + s$, где s – остаток. Получаем, что $x + y = 26y + s = 2015$. $26y = 2015 - s$. Из неравенства $0 \leq s \leq 24$ получаем

$$2015 - 24 \leq 26y \leq 2015, \text{ или} \\ 76,5 < y < 77,5$$

Значит, $y = 77$, а $x = 1938$.

5. Спросим дважды подряд у любого мальчика: «Тебя зовут Вася?» Петя два раза ответит «Нет», Вася на первый вопрос ответит «Нет», а на второй — «Да», а Витя оба раза скажет «Да». Так мы за два вопроса узнаем, как зовут нашего собеседника. Затем спросим у него, указав на любого из двух остальных: «Как зовут этого мальчика?», и получим на свой третий вопрос правдивый ответ.

8 класс

1. Ответ 42.

Если число отсутствующих – одна часть, то число присутствующих – 6 частей, т.е. в начале отсутствующие составляли $\frac{1}{7}$ часть от всех участников олимпиады. После выхода одного участника стали $\frac{1}{6}$ часть. Значит один участник $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ от общего количества. Таким образом, на олимпиаду было заявлено 42 ученика.

2. Ответ. Дима младше Дмитриева на 10 лет.

Пусть возраст Димы отличается от возраста Дмитриева на x лет. Сумма возрастов, посчитанная «по именам» и «по фамилиям» одинаковы. Значит, $1 + 2 + 3 + 4 + x = 0$, откуда $x = -10$. Дима младше Дмитриева на 10 лет.

3. Ответ. 12%.

В Москве через год цены на жилье составят 90% в рублях и 80% в евро от нынешних. Значит, цена самого евро в рублях изменится в $0,80,9 = 89$ раз. В Иваново цена квартиры в рублях будет составлять 99%, а в евро – $99\% \cdot 8/9 = 88\%$ от нынешней. Значит, она уменьшится на 12%.

4. Ответ. Это числа $3 \dots 33$ и $3 \dots 34$ (по 100 цифр в каждом).

Имеем $12 = 3 \cdot 4$, $1122 = 33 \cdot 34$. Покажем, что это равенство верно для любых чисел такого типа. Обозначим число $1 \dots 11$ с n единицами через a . Тогда $11 \dots 1122 \dots 22 = a \cdot 10^n + 2a$, причем $10^n = 9a + 1$. Значит, $11 \dots 1122 \dots 22 = a(9a + 1) + 2a = 9a^2 + 3a = 3a(3a + 1)$ – произведению двух последовательных чисел. Заметим, что $3a = 3 \dots 33$, $3a + 1 = 3 \dots 34$.

5. На отрезке BM отметим точку N такую, что $MN = BK$. Тогда треугольник AMN – равносторонний, отсюда $AN = MC$, $\angle BNA = 120^\circ$. Значит, треугольники ANB и CMK равны, отсюда $AB = CK$.

9 класс

1. Ответ. Может.

Заметим, что при всех целых значениях x , значение выражения $x(x+1)$ делится на 2, как произведение двух последовательных целых чисел (поэтому одно из чисел непременно является четным). Следовательно, искомый квадратный трехчлен может иметь вид

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

2. Ответ. Сумма цифр равна 18.

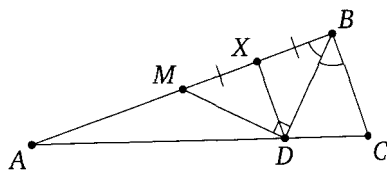
По условию сумма первых трёх цифр делится на 9, и сумма последних трёх делится на 9. Значит, разность между первой и последней цифрой делится на 9. Поскольку все цифры различные, первая цифра 9, а последняя – ноль. Поскольку сумма последних трёх цифр делится на 9, а последняя цифра 0, значит, и сумма двух средних цифр делится на 9. Так как средние цифры обе меньше 9 и больше 0, их сумма меньше 18, но больше нуля (и делится на 9). Следовательно, сумма двух средних цифр равна 9, а сумма всех цифр этого числа равна 18.

3. Ответ. 37 пеньков.

Первый велосипедист проезжает один километр за четыре минуты, а второй – за три. Всего они проехали 37 км, поэтому первый был в пути на 37 минут больше второго. Следовательно, первый велосипедист отдыхал на 37 минут меньше первого. Но из условия следует, что первый отдыхал в два раза меньше второго. Поэтому первый велосипедист отдыхал в точ-

ности 37 минут. Поскольку на каждом пеньке он сидел по целому числу минут, то пеньков было ровно 37.

4. Ответ. 90° .



Пусть X – середина отрезка MB , проведем отрезок DX . По свойству биссектрисы будем иметь

$$AD : DC = AB : BC = 3:1.$$

С другой стороны, $AX : XB = 3:1$, поэтому $AD : DC = AX : XB$. Отсюда следует, что $XD \parallel BC$. Тогда $\angle XBD = \angle DBC = \angle XDB$, что означает, что $XD = XB = XM$. Отсюда получаем, что $\angle MDB = 90^\circ$.

5. Ответ. Можно.

Решение. Сначала переливаем все из первой банки в остальные до краев. Затем половину второй банки переливаем в первую, половину третьей банки в первую, половину третьей банки во вторую. В первой и второй банке смеси одинаковые. Доливаем их в третью так, чтобы во всех трех стало поровну. Теперь из четвертой банки доливаем ее содержимое в первые три. В них получена одинаковая смесь, разливаем ее из них в четвертую.

10 класс

$$1. \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{a + b} = (a + b) - 2 \cdot \frac{ab}{a + b} - \text{целое число.}$$

$$2. \text{ По условию } a^2 < 4b, c^2 < 4d. \text{ Покажем, что } \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 < 4\left(\frac{b + d}{2}\right).$$

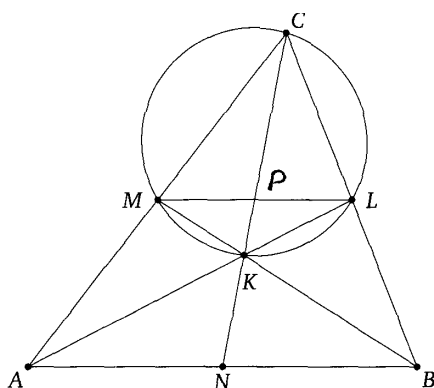
Имеем

$$\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2) \leq \frac{1}{4}(a^2 + (a^2 + c^2) + c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) < \frac{1}{2}(4b + 4d).$$

(В ходе доказательства использовали неравенство $2ac \leq a^2 + c^2 \Leftrightarrow (a - c)^2 \geq 0$.)

3. Занумеруем кошельки слева направо. Сравним 3-й и 6-й кошельки. Равенство означает, что перекладывали из 1-го, 4-го или 7-го. Сравнив любые два, найдём самый легкий. Если 3-й тяжелее 6-го, то перекладывали либо из 2-го, либо из 6-го. Сравниваем их. Если 3-й легче 6-го, то перекладывали либо из 3-го, либо из 5-го. Сравниваем их.

4. Ответ. $\sqrt{3}$.



Так как ML – средняя линия треугольника ABC , получаем, что $ML \parallel AB$ и $ML = \frac{1}{2}AB = 1$. Если P – точка пересечения медианы CN и средней линии ML , то $CP = PN$ и $MP = PL = \frac{1}{2}$.

Пусть x – длина медианы CN , тогда

$$CP = \frac{1}{2}x, \quad PK = PN - KN = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x.$$

Поскольку четырехугольник $CLKM$ вписанный, получаем, что $\angle MCK = \angle KLM$. Отсюда следует, что $\triangle MCP \sim \triangle KLP$ (по двум углам). Тогда $\frac{MP}{KP} = \frac{PC}{PL}$, то есть $MP \cdot PL = KP \cdot PC$.

Учитывая, что $MP \cdot PL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ и $KP \cdot PC = \frac{1}{6}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{12}x^2$, получим

$$\frac{1}{12}x^2 = \frac{1}{4}, \text{ откуда } x = \sqrt{3} \text{ (с учетом } x > 0 \text{)}.$$

5. Ответ. (0, 0, 0) и (2, 2, 2).

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим

$$x - z = z^2 - x^2, \text{ то есть } x - z = (z - x)(z + x).$$

Учитывая, что $z + x = y^2$, приходим к уравнению $x - z = (z - x)y^2$.

Вычитая из второго уравнения третье, аналогичными рассуждениями получим уравнение $y - x = (x - y)z^2$.

Таким образом, приходим к следствию исходной системы

$$\begin{cases} x - z = (z - x)y^2, \\ y - x = (x - y)z^2. \end{cases}$$

Преобразуем последнюю систему к виду:

$$\begin{cases} (x - z)(1 + y^2) = 0, \\ (y - x)(1 + z^2) = 0. \end{cases}$$

Тем самым доказано, что если исходная система имеет решение, то $x = y = z$ и $2x = x^2$.

Следовательно, данная система может иметь лишь два решения: $x = y = z = 0$ и $x = y = z = 2$. Других решений нет.

Проверкой убеждаемся, что (0, 0, 0) и (2, 2, 2) – решения данной системы.

11 класс

$$1. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}{a + b + c} = (a + b + c) - 2 \cdot \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} - \text{целое число.}$$

2. Ответ. $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ или $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x)$, то справедливо разложение

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Так как корни различные, то можем полагать, что $x_1 < x_2$. По условию $f(3) = (3 - x_1)(3 - x_2)$ - простое число, следовательно, $x = 3$ не является корнем квадратного трехчлена $f(x)$, то есть $x_1 \neq 3$ и $x_2 \neq 3$, при этом один из множителей разложения необходимо равен 1.

Рассмотрим случаи.

1) Если $3 < x_1 < x_2$, то $f(3) = (3 - x_1)(3 - x_2) = (x_1 - 3)(x_2 - 3)$ и $x_1 - 3 < x_2 - 3$, поэтому $x_1 - 3 = 1$, то есть $x_1 = 4$. Тогда $f(3) = x_2 - 3$. Учитывая, что x_2 - простое число, большее 3, то оно нечетное. Тогда число $f(3) = x_2 - 3$ будет четным. Так как по условию оно является простым, то это возможно лишь в случае, когда оно равно 2, то есть $x_2 - 3 = 2$, откуда $x_2 = 5$.

Искомый квадратный трехчлен имеет вид $f(x) = x^2 - 9x + 20$, корни которого $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

2) Если $x_1 < 3 < x_2$, то $f(3) = (3 - x_1)(3 - x_2) < 0$, поэтому этот случай невозможен.

3) Если $x_1 < x_2 < 3$, то $f(3) = (3 - x_1)(3 - x_2)$ и $3 - x_2 < 3 - x_1$, поэтому $3 - x_2 = 1$, откуда $x_2 = 2$. Так как x_1 - натуральное, то получаем единственно возможное значение $x_1 = 1$. Получим еще одно решение задачи: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ для трехчлена $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

3. Докажем сначала, что для положительных чисел x и y из неравенства $x < y$ следует неравенство $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$. Действительно, рассмотрим разность

$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)}.$$

Учитывая условие $x - y < 0$, получим

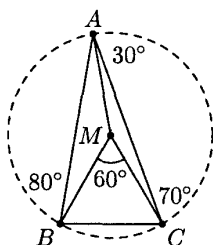
$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} < 0.$$

Пусть согласно условию задачи $a < b + c$, тогда по доказанному выше будем иметь

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

4. Ответ. $\angle MAB = 20^\circ$, $\angle MAC = 10^\circ$.

Рассмотрим окружность с центром в точке M и радиусом $R = MB = MC$ (см. рис.).



$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 30^\circ$, $\angle BMC = 60^\circ$, следовательно, точка A лежит на этой окружности, то есть окружность является описанной для треугольника ABC . Значит, $MA = MB = MC$, тогда $\angle MAB = \angle MBA = 20^\circ$, $\angle MAC = \angle MCA = 10^\circ$.

5. Ответ. $x_{2015} = 0$.

Покажем, что данная последовательность является периодической с периодом 9.

Найдем

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = -1, x_{10} = 1, x_{11} = 2, \dots$

Поскольку последовательность полностью определяется любыми двумя соседними членами, мы получили, что 9 – период этой последовательности. Это означает, что для любых $k, r \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $x_{9k+r} = x_r$.

Найдем x_{2015} , для этого разделим число 2015 на 9 с остатком: $2015 = 9 \cdot 223 + 8$. Тогда $x_{2015} = x_8 = 0$.

Критерии оценивания и организация проверки работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, оцениваются частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Таким образом, при подсчете окончательных баллов по задаче жюри учитывает все перечисленные случаи, а также возможные логические и арифметические ошибки в решениях.

Проверка работ на математической олимпиаде проводится в два этапа. На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс-минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Знак	Правильность решения
+	Полное верное решение
+. .	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
\pm	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений
+ / 2	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка
\mp	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
-. .	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения
-	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение.

По окончании первого этапа проверки группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведенные решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается в 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Знак	+	+. .	\pm	+ / 2	\mp	-. .	-	0
Баллы	7	6-7	5-6	4	2-3	0-1	0	0

Максимальный балл за выполнение всех заданий – 35.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Баллы не снимаются за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, оценивается в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия или основы доказательства. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равнобедренным, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC – равнобедренный». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами жюри.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели.

